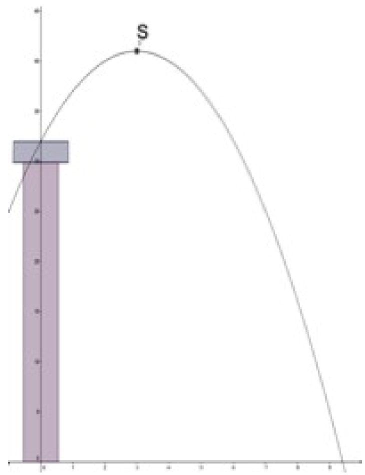
Schiefer Wurf



Von einem Turm aus wird ein Stein geworfen.
Die Wurfbahn ist parabelförmig.

(1) Die allgemeine Form der Parabelgleichung lautet:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Welche Aussagen können bereits jetzt über mindestens einen der Koeffizienten a, b oder c getroffen werden ?

Antwort: ____
____

(2) Hier sind mögliche Parabelgleichungen angegeben:
$y = 2x^2 + 6x - 32$ bzw. $y = -x^2 + 6x + 32$
bzw. $y = 2x^2 + 6x + 32$ bzw. $y = -x^2 + 6x - 32$
Nur eine davon kann auf die obige Wurfbahn zutreffen. Welche ?

Antwort:____

(3) Ermittle die Höhe des Turmes mit Hilfe der in (2) gefundenen Lösung .

Antwort:____

(4) Welche maximale Höhe erreicht der Stein auf seiner Flugbahn ?
Wie weit ist er dann vom Turm entfernt ?

Antwort:____

(5) In welcher Entfernung vom Turm schlägt der Stein auf dem Erdboden auf ?

Antwort:____

(6) **Zur Überprüfung, ob du die Turm-Aufgabe verstanden hast,**
hier ein zweites Beispiel:

Noch einmal sehen wir einen Turm, von dem aus ein Stein geworfen wird.

<u>Angaben:</u>
Die Flugbahn ist eine Normalparabel.
Die Turmhöhe beträgt 50 Meter.
Der Stein schlägt 12,50 Meter vom Turm entfernt auf.

Ermittle die Parabelgleichung
sowie den höchsten Punkt der Flugbahn.

Lösungsweg:

<u>Ergebnisse:</u>
Parabelgleichung:____

Höchster Punkt der Flugbahn:____

Steckbrief der Aufgabe

Inhaltliche Kurzbeschreibung:

Die Schüler sollen mit der Parabelgleichung umgehen, sie interpretieren, auf Scheitelpunktsform bringen und Nullstellen bestimmen. Das Ganze ist in den Sachzusammenhang einer Wurfaufgabe eingekleidet.

Funktion der Aufgabe:

Interpretation von Funktionstermen bei quadratischen Funktionen
Berechnung von Scheitelpunkten
Bestimmung von Nullstellen

Doppeljahrgangsstufe: 9/10

Schulformen, in denen entwickelt/erprobt wurde:

Für Gymnasien und Realschulen (erprobt an einer Realschule)

Erforderliche Kenntnisse:

Quadratische Funktionen

Bezug zu den Kompetenzen des Kernlehrplans:

Argumentieren / Kommunizieren

Kernlehrplan	Schülerinnen und Schüler	Hier speziell:
Vernetzen	setzen Begriffe und Verfahren miteinander in Beziehung	Parabelgleichung und Wurfbahn

Modellieren

Kernlehrplan	Schülerinnen und Schüler	Hier speziell:
Mathematisieren	übersetzen Situationen aus Sachaufgaben in mathematische Modelle	Parabelgleichung und Wurfbahn
Realisieren	ordnen einem mathematischen Modell eine passende Realsituation zu	

Arithmetik / Algebra

Kernlehrplan	Schülerinnen und Schüler	Hier speziell:
Anwenden	verwenden ihre Kenntnisse über Lösung von Gleichungssystemen und Gleichungen	Gleichungssysteme mit zwei Variablen, quadratische Gleichungen

Funktionen

Kernlehrplan	Schülerinnen und Schüler	Hier speziell:
Anwenden	Verwenden und interpretieren Funktionsterme.	Quadratische Funktionen

Erwartete Schülerlösung

Von einem Turm aus wird ein Stein geworfen.
Die Wurfbahn ist parabelförmig.

(1) Die allgemeine Form der Parabelgleichung lautet:
$y = ax^2 + bx + c$
Welche Aussagen können bereits jetzt über mindestens einen der Koeffizienten a, b, c getroffen werden ?

Antwort: a muss negativ sein, da die Parabel nach unten geöffnet ist; c ist positiv.

(2) Hier sind mögliche Parabelgleichungen angegeben:
$y = 2x^2 + 6x - 32$ bzw. $y = -x^2 + 6x + 32$
bzw. $y = 2x^2 + 6x + 32$ bzw. $y = -x^2 + 6x - 32$
Nur eine davon kann auf die obige Wurfbahn zutreffen. Welche ?

Antwort: $y = -x^2 + 6x + 32$

(3) Ermittle die Höhe des Turmes .

Antwort: c gibt die Höhe des Turmes an, er ist also 32 Meter hoch.

(4) Welche maximale Höhe erreicht der Stein auf seiner Flugbahn ?
Wie weit ist er dann vom Turm entfernt ?

Antwort: Maximale Höhe: 41 Meter in 3 Meter Entfernung vom Turm.
(Scheitelpunkt der Parabel S(3 / 41))

(5) In welcher Entfernung vom Turm schlägt der Stein auf dem Erdboden auf ?

Antwort: In ca. 9,40 Metern Entfernung vom Turm schlägt der Stein auf (Nullstellenbestimmung mit quadratischer Funktion in Scheitelform).

(6) **Zweites Beispiel:**

Lösungsweg: Ansatz $y = - x^2 + bx + c$ mit $c = 50$
Durch Einsetzen von P (12,50 / 0) errechnet man $b = 8,5$.
Parabelgleichung: $y = - x^2 + 8,5x + 50$.
Höchster Punkt der Flugbahn: S (4,25 / 68,0625)

Erstellt von:

Sinus-Transfer, Projekt 1, Set Süd, Untergruppe Köln

Hochsprung

(Nach Liese, Rainer: Immer höher, immer weiter, mathematiklehren, Juni 84)

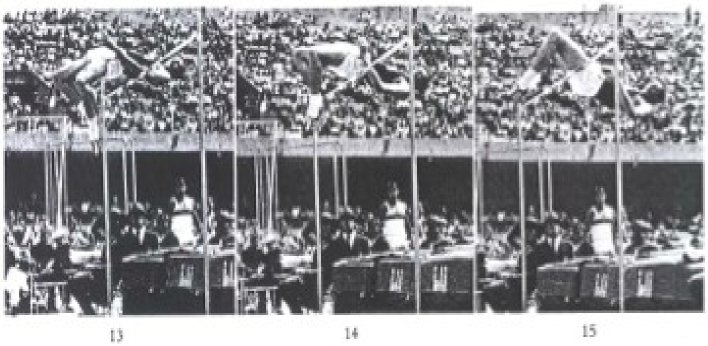


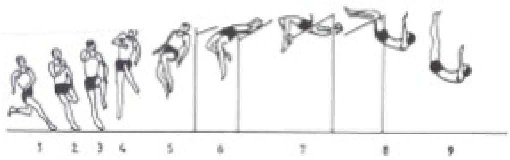
Abb. 11 Flop in der Originaltechnik von Dick Fosbury.

In der Leichtathletik kann man die Flugkurven untersuchen, die beim Hochsprung zu beobachten sind. Dabei untersucht man die Bahn des Körperschwerpunktes des Athleten. Die Flugbahn des Körperschwerpunktes lässt sich durch eine Parabel beschreiben. Bei einem gestreckten Körper liegt der Körperschwerpunkt 0,6xKörpergröße von den Fußsohlen entfernt.
Bei den unterschiedlichen Sprungstilen liegt der Scheitelpunkt der Bahn verschieden hoch über oder sogar durch die Krümmung des Körpers bedingt unterhalb der Latte. Bei einem guten Sprung des Fosbury-Flop sollten die Sportler folgendes anstreben:

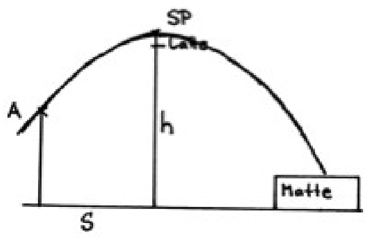
- Der Scheitelpunkt liegt genau 5 cm oberhalb der Latte.
- Der Sportler springt eine Armlänge vor dem Hochsprunggerüst ab.

1. Fertige eine Planskizze an, die den Sachverhalt beschreibt.
2. Begründe, dass sich die Flugbahn in einem geeignet gewählten Koordinatensystem in der Form $y = -a x^2 + e$ mit $a > 0$ beschreiben lässt.
3. Ulrike Meyfarth gewann bei den Olympischen Spielen im München 1972 mit 16 Jahren völlig überraschend die Goldmedaille im Hochsprung. Sie gewann damals mit einer Höhe von 1,92 m mit Fosbury-Stil. Ihre Körpergröße betrug 1,88 m, ihre Armlänge 90 cm. Gehe im folgenden davon aus, dass es ein guter Sprung war.
   a) Gib die Koordinaten von Absprung- und Scheitelpunkt an.
   b) Bestimme damit die Gleichung der Flugparabel bei dem Siegsprung in München.
   c) Zeichne den Graphen der Flugbahn des Körperschwerpunktes in ein geeignetes Koordinatensystem und markiere Absprung- und Scheitelpunkt und die übersprungene Höhe.
   d) Auf welcher Höhe befindet sich der Körperschwerpunkt in 0,5 m, 1 m und 1,5 m Entfernung vom Hochsprunggerüst ?
4. Der Absprungpunkt muss von den Springern genau getroffen werden, um die optimale Höhe über der Latte zu erreichen.
   a) Welche Gleichung ergibt sich, wenn Ulrike Meyfarth den Absprung um eine Fußlänge (ca. 25cm) zu früh beginnt ?
   b) Zeichne diese Flugbahn in das vorhandene Koordinatensystem ein und markiere die wichtigen Punkte.
   c) Welche Höhe hätte sie damit erzielt ?

Lösungshinweise Hochsprung



Skizze



Scheitelpunkt SP auf y-Achse, Parabel nach unten geöffnet, nach oben verschoben

a) für A:

$x = -90$; $y = 0{,}6 \cdot 188 = 112{,}9$; also $A = (-90/113)$

für SP:

$x = 0$; $y = 192 + 5 = 197$; also $SP = (0/197)$

b) Ansatz $y = -a x^2 + e$ führt mit den Koordinaten von A und SP auf

$a =$ und $e = 197$

c) s. unten

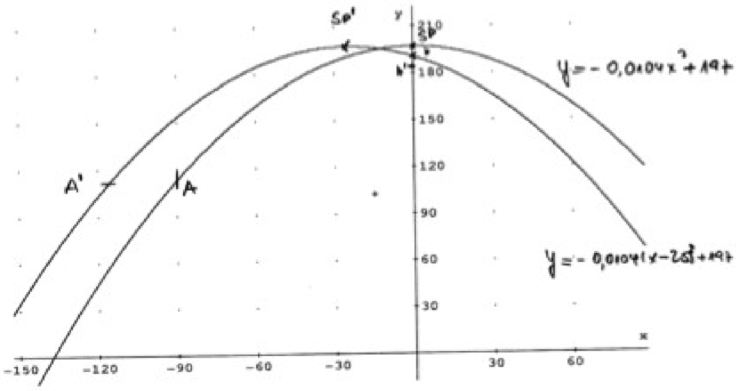
4. a) $y = a(x - d)^2 + e$

$y = -0{,}0104(x + 25)^2 + 197 = -0{,}0104x^2 - 0{,}52x + 190{,}5$

b) s. unten

c) $x = 0$ liefert $y = 190{,}5$

wegen der Differenz SP zu Latte (-5cm) gilt $h = 185{,}5$cm



Erstellt von: Arbeitsgruppe der Bezirksregierung Düsseldorf im BlK-Modellversuch Sinus

Scheitelpunkt quadratischer Funktionen

1. Weitsprung

Bob Beamon sprang bei seinem Weltrekord bei den Olympischen Spielen 1968 in Mexiko-City 8,90 m weit.
Sein Körperschwerpunkt legte dabei in etwa die Bahn
einer Parabel zurück, die angenähert durch die Gleichung

$$y = -0{,}571x^2 + 0{,}3838x + 1{,}14$$

beschrieben wird.
Dabei gibt y die jeweilige Höhe des Körperschwerpunktes über der Sprunggrube (in m) und x die horizontale Entfernung von der Ausgangslage beim Absprung (in m) an.
Hätte Bob Beamon bei seinem Weltrekord einen VW-Golf übersprungen ?

2. Senkrechter Wurf

Eine Kugel wird senkrecht nach oben geschossen. Ihre Höhe wird durch die Funktionsgleichung

$$h(t) = 40\,t - 5\,t^2$$

angenähert beschrieben. Dabei ist t die Zeit seit dem Abschuss (in Sekunden).

Nach welcher Zeit erreicht die Kugel ihren höchsten Punkt ? In welcher Höhe befindet sie sich dann ?
In welcher Höhe befindet sich die Kugel nach 2 Sekunden ? Wann erreicht sie die gleiche Höhe beim Zurückfallen ?
Mit welcher Geschwindigkeit (in km / h) wurde die Kugel in die Höhe geschossen ?

> aus der Formelsammlung:
> Wird eine Kugel senkrecht nach oben geworfen, so kann man ihre Höhe mit der Formel
> $h = v_0\,t - 5\,t^2$ angenähert berechnen.
> Hierbei ist t die Zeit seit dem Abwurf (in Sekunden) und v_0 die Abwurfgeschwindigkeit in m/s.

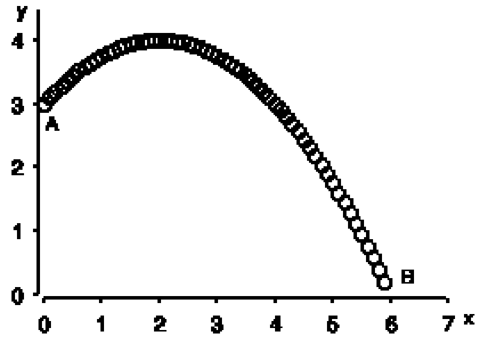
Kugelstoßen

Beim Kugelstoßen durchläuft die Kugel näherungsweise eine Parabelbahn, die mit der Gleichung

$$f(x) = a\,x^2 + x + c$$

beschrieben werden kann.

Die Zahlen a und c sind dabei abhängig vom Wurf (Größe des Werfers / Höhe des Abwurfpunktes, Geschwindigkeit der Kugel beim Abwurf).



In unserem Fall hat die Kugel - kurz nachdem sie die Hand des Werfers verläßt - eine Höhe von 3 m über dem Erdboden. 6 Meter weiter landet die Kugel.

1. Bestimme die Koeffizienten a und c, die zur abgebildeten Flugbahn gehören.

Rechne ab jetzt mit der folgenden Funktion weiter:

2. Welche maximale Höhe über dem Erdboden hat die Kugel während des Fluges erreicht ?
3. Der Werfer stößt die Kugel in einer Höhe von 2,50 m ab.
   Vervollständige die Skizze und die Flugbahn.
4. Wie weit steht der Werfer vom Start der Messung (Nullpunkt) entfernt ?
5. In welcher Entfernung vom Abstoßpunkt befindet sich die Kugel, wenn sie bei ihrer Abwärtsbewegung wieder die Höhe 2,5 m passiert ?
6. Erläutere, wieso ein größerer Kugelstoßer (bei ansonsten gleichen Bedingungen) bessere Weiten erzielen kann.
7. Der Werfer stößt die Kugel im Training gegen eine Böschung, die gleichmäßig ansteigt.
   Die Böschung beginnt im Nullpunkt und erreicht nach 10 Metern eine Höhe von 3,5 Metern.
   Gib den Funktionsterm an, der den Verlauf der Böschung beschreibt.
   Bestimme rechnerisch den Punkt, an dem die Kugel auf die Böschung trifft.

Lösungshinweise Kugelstoßen

1. Der Punkt A(0/3) liegt auf der Kurve, d.h.
$f(0) = 3 \iff a \cdot 0^2 + 0 + c = 3 \iff c = 3$.
Auch liegt der Punkt B(6/0) auf der Kurve, d.h.
$f(6) = 0 \iff a \cdot 36 + 6 + 3 = 0 \iff 36\,a = -9 \iff a = -1/4 = -0{,}25$
Damit lautet die Funktion $f(x) = -1/4\, x^2 + x + 3$.

2. Da die Parabel nach unten geöffnet ist, erreicht die Kugel ihr maximale Höhe im Scheitelpunkt.

$$f(x) = -1/4\,[x^2 - 4x - 12]$$
$$= -1/4\,[(x-2)^2 - 4 - 12]$$
$$= -1/4\,(x-2)^2 + 4 .$$

Der Scheitelpunkt ist S (2 / 4). Die Kugel erreicht also die größte Höhe 4 m über dem Boden.

4. Der Werfer steht an der Stelle x (x < 0), für die gilt

$$f(x) = 2{,}5$$
$$\iff -1/4\,x^2 + x + 3 = 2{,}5$$
$$\iff -1/4\,x^2 + x + 0{,}5 = 0$$
$$\iff x^2 - 4x - 2 = 0$$
$$\iff (x-2)^2 - 6 = 0$$
$$\iff x = 2 - \quad \vee \quad x = 2 +$$
$$\iff x\ \ -0{,}45 \quad \vee \quad x\ \ 4{,}45$$

Wegen x < 0 steht der Werfer an der Stelle x - 0,45 , d.h. etwa 45 cm vom Start der Messung entfernt.

5. Lösungsweg 1: Symmetriebetrachtung
Die Parabel ist symmetrisch zu einer Geraden (Achse) parallel zur y-Achse durch S(2/4).
Daher wird die Höhe y = 2,5 m genauso weit rechts vom Scheitelpunkt erreicht, wie es links vom Scheitelpunkt der Fall war.
Links vom Scheitelpunkt war die Kugel bei x = 2 - auf einer Höhe von y = 2,5 , also von der Achse entfernt. Also wird die Höhe von y = 2,5 auch Meter rechts von der Achse erreicht, also bei x = 2 + 4,45 Metern.

Lösungsweg 2: Rechnen
Es ist

$$y = f(x) = 2{,}5$$
$$\iff -1/4\,x^2 + x + 3 = 2{,}5$$
$$\iff x = 2 - \quad \vee \quad x = 2 +$$
$$\iff x\ \ -0{,}45 \quad \vee \quad x\ \ 4{,}45 \qquad \text{(vgl. Aufgabenteil 4)}$$

Nach etwa 4,45 Metern vom Abwurfpunkt (Nullpunkt) entfernt passiert die Kugel wieder eine Höhe von 2,5 Metern.

6. Bei einem größeren Kugelstoßer liegt der Abstoßpunkt höher
Die Parabelbahn bleibt gleich, ist jedoch nach oben verschoben.
Dadurch liegt der Auftreffpunkt (Nullstelle) weiter rechts, d.h. die Weite wird größer.

7. Die Böschung steigt auf 10 Meter horizontal 3,5 Meter an, d.h. 0,35 m Anstieg auf 1 m

horizontal. Deshalb ist die Steigung $m = 0{,}35$. Weil die Böschung im Nullpunkt beginnt, ist die Funktion proportional, und der Funktionsterm, der den Verlauf der Böschung beschreibt, lautet

$$y = 0{,}35 \cdot x \, .$$

Schnittpunkt von Böschung und Flugbahn:

$y\ (\text{Böschung}) = y\ (\text{Parabel})$

$<=> \quad 0{,}35 \cdot x = -\,1/4\, x^2 + x + 3$

$<=> \quad 1/4\, x^2 - 0{,}65\, x - 3 = 0$

$<=> \quad x^2 - 2{,}6\, x - 12 = 0$

$<=> \quad x = 1{,}3 \pm$

$<=> \quad x = 1{,}3 \pm 3{,}7$

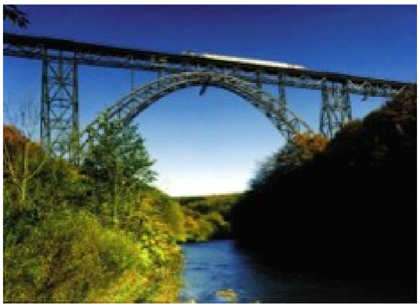
$<=> \quad x = -\,2{,}4 \quad \text{v} \quad x = 5$

Die Kugel trifft nach 5 Metern auf die Böschung in einer Höhe von $y = 0{,}35 \cdot 5 = 1{,}75$ Metern

Erstellt von: Arbeitsgruppe der Bezirksregierung Düsseldorf im BLK-Modellversuch Sinus

Nullstellen

1. Müngstener Brücke



Viele moderne Brücken haben die Form von Parabeln.
Die Abbildung rechts zeigt die Müngstener Brücke bei Solingen aus den fünfziger Jahren.
Legt man ein Koordinatensystem in den Scheitel des Bogens, so hat die Parabel die Gleichung .
Die Bogenhöhe beträgt 69 m. Berechne die Spannweite.

2. Gateway-Arch

Quelle:
http://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Datei:St_Louis_night_expblend.jpg&filetimestamp=20080128173813

Wikimedia Commons, lizenziert unter GNU-Lizenz für freie Dokumentation, eingestellt von Daniel Schwen

Der Bogen des Gateway-Arch in St.Louis lässt sich näherungsweise durch folgende Funktionen beschreiben:

$$f(x) = -0{,}02071\, x^2 + 192{,}15\ .$$

a) Berechne die Höhe und die Breite des Bogens.
b) Ein Flugzeug mit der Spannweite 20 m fliegt in 100 m Höhe mitten durch den Bogen. Wie weit sind die Flügelspitzen seitlich vom Bogen entfernt ?
c) Informiere dich über den Gateway-Arch (Geschichte, Bedeutung) und überprüfe die berechneten Daten (Höhe, Breite).

Die Kölnarena

Das Dach der Kölnarena, einer Veranstaltungshalle in Köln-Deutz, wird von einem Stahlbogen getragen, der die Form einer quadratischen Parabel hat. Der Bogen ist über dem ebenen Erdboden an der höchsten Stelle 73 m hoch und hat eine Spannweite von ca. 180 m.

a) Bestimme eine Gleichung derjenigen Funktion f, die die Parabel beschreibt.

Das Dach der Kölnarena ist leicht geneigt. Zur Vereinfachung nehmen wir zunächst an, dass es waagerecht verläuft.
Für den Parabelbogen sollst du im folgenden mit weiterrechnen.

b) Wie lang kann das Dach maximal sein, wenn die Halle (über dem Erdboden) 30 Meter hoch sein soll ?

c) Der Bauherr möchte, dass die Halle mit diesem Parabelbogen 160 m lang sein soll.
Was würdest du entgegenhalten ?

d) Kann man bei gleicher Höhe (73 m) einen Parabelbogen so konstruieren, dass ein 140 m langes Dach in 40 m Höhe aufgehängt werden kann ?
Begründe rechnerisch ! Begründe auch nicht-rechnerisch, d.h. inhaltlich bzw. anschaulich !

Die Abspannseile sind in gleichen Abständen von 10 m auf dem Dach befestigt. Sie treffen im Winkel von 45° auf die Dachfläche. Wie lang sind die Seile bei den x-Werten x = - 60 und x = - 50 ?

Das Dach der Kölnarena ist tatsächlich leicht geneigt. Auf der tieferen Seite ist es in 30 m Höhe an den Parabelbogen angehängt und steigt dann alle 10 m um 30 cm an.
Wie lang ist das Dach und wie hoch ist es auf der anderen Seite ?

Steckbrief der Aufgabe

Inhaltliche Kurzbeschreibung

In einer anwendungsbezogenen Aufgabe werden verschiedene Aspekte von Parabeln behandelt, z.B. Form, quadratische Gleichungen und Schnitt mit Geraden. Ein Schwerpunkt liegt auf dem Aspekt des Modellierens.

Funktion der Aufgabe:

Zunächst bietet die Aufgabe die Möglichkeit, Basisfertigkeiten zu Parabeln anzuwenden, nämlich das Lösen quadratischer Gleichungen und den Schnitt einer Parabel mit einer Geraden.
Der Schwerpunkt der Aufgabe liegt indes auf dem Modellieren. Zum einen sollen die Schüler die Gleichung eines Parabelbogens aufstellen. Zum anderen müssen sie stets den wechselseitigen Bezug zwischen den Angaben aus der Realität und den Größen im mathematischen Modell herstellen.

Doppeljahrgangsstufe: 9/10

Schulformen, in denen entwickelt/ erprobt wurde:

Gymnasium

Erforderliche Vorkenntnisse:

Geradengleichungen; Parabelgleichungen; Lösen quadratischer Gleichungen;
gleichschenklige Dreiecke; Satz des Pythagoras

Bezug zu den Kompetenzen des Kernlehrplans:

Modellieren		
	Kernlehrplan	Hier speziell:
mathematisieren	übersetzen Realsituationen in mathematische Modelle	Die Schüler stellen die Gleichung der Parabel auf (Teil a).
		Vor allem interpretieren sie die Angaben aus dem Text (Punkte auf dem Parabelbogen) als x- bzw. y-Werte im mathematischen Modell (Graph im Koordinatensystem, Funktionsgleichung) – und umgekehrt.

Funktionen		
	Kernlehrplan	Hier speziell:
anwenden	wenden quadratische Funktionen zur Lösung außermathematischer Problemstellungen an	Die Schüler benutzen ihre Kenntnisse über Parabelgleichungen und die Bedeutung der Koeffizienten, um Parabelgleichungen aufzustellen (a, d) und die Koeffizienten zu interpretieren (d).
operieren	lösen quadratische Gleichungen	Die Schüler lösen eine einfache und eine schwierigere quadratische Gleichung (b, f).

Mögliche Schülerlösungen:

Legt man das Koordinatensystem so fest, dass die x-Achse auf dem Erdboden und die y-Achse durch den höchsten Punkt des Stahlbogens verläuft, so hat die Parabelgleichung die Form

$y = a x^2 + b$ mit unbekannten Formvariablen a und b.

Der höchste Punkt (0 / 73) führt sofort zu b = 73.

Aus der Spannweite von 180 m ergeben sich die Punkte P (- 90 / 0) und P' (90 / 0).

Eingesetzt in die Gleichung führt dies auf

$0 = a \cdot 90^2 + 73 \quad \Leftrightarrow \quad -73 = 8100\,a \quad \Leftrightarrow \quad a = -73 / 8100 \approx -0{,}009$.

Demnach wird der Parabelbogen beschrieben durch die Gleichung

$f(x) = -73 / 8100\, x^2 + 73$.

b) y = 30: $30 = -73 / 8100\, x^2 + 73 \quad \Leftrightarrow \quad 73 / 8100\, x^2 = 43$

$x^2 \approx 4771 \quad \Leftrightarrow \quad x \approx \pm 69{,}07$

Das Dach bzw. die Halle kann maximal 138,14 m lang sein.

c) Ist die Halle 160 m lang, so ist $x = \pm 80$, woraus $y = f(80) \approx 15{,}32$ folgt.

Wenn die Halle 160 m lang sein soll, dann kann sie höchstens 15,32 m hoch sein.

Dies kann für einige Zwecke (Sport, Konzerte mit Beleuchtung) zu niedrig sein.

Auch mögen sich die Zuschauerplätze, die man in der Länge gewinnt, in der Höhe verlieren.

d) Hier wird die Stauchung des Parabelbogens variiert.

$y = a x^2 + 73$ und P(70 / 40) sind gegeben.

$40 = a \cdot 70^2 + 73 \quad \Leftrightarrow \quad -33 = 4900\,a \quad \Leftrightarrow \quad a = -33 / 4900 \approx -0{,}0067$.

Die Parabel wäre mit $a \approx -0{,}0067$ stärker gestaucht als die bestehende Parabel mit $a \approx -0{,}009$.

Ein derart gestauchter Stahlbogen könnte eine geringere Tragfähigkeit besitzen, oder die Verankerung im Boden (kleinerer Winkel) fällt schwerer.

Mit dem Winkel α = 45° bilden das Abspannseil, die Höhe (Parabelbogen – Dach) und eine dritte Seite auf dem Dach ein gleichschenkliges Dreieck.

Für x = - 60 rechnet man:

Höhe = f (- 60) – 30 ≈ 10,56

Pythagoras: $10{,}56^2 + 10{,}56^2 = \text{Seillänge}^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Seillänge} \approx \sqrt{2} \cdot 10{,}56 \approx 14{,}93$

Für x = - 50 rechnet man:

Höhe = f (- 50) – 30 ≈ 20,47

Pythagoras: $20{,}47^2 + 20{,}47^2 = \text{Seillänge}^2 \quad \Rightarrow \quad \text{Seillänge} \approx \sqrt{2} \cdot 20{,}47 \approx 28{,}95$

f) Das Dach kann beschrieben werden durch eine Gerade mit der Gleichung

$y = m \cdot x + b$mit m = 0,3 m / 10 m = 0,03.

Die Gerade verläuft durch P (- 69,07 / 30) :

$30 = 0{,}03 \cdot (-69{,}07) + b \quad \Leftrightarrow \quad b \approx 32{,}07$.

Die Gleichung der Geraden lautet $y = 0{,}03\,x + 32{,}07$.

Die Höhe und auch die Länge des Daches ändern sich. Um die veränderten Daten zu erhalten, muss man die Schnittpunkte von Gerade und Parabel ermitteln.

$$-\frac{73}{8100}x^2+73=0{,}03\,x+32{,}07$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{73}{8100}x^2-0{,}03\,x+40{,}93=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2+3{,}33\,x-4541{,}55=0$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1/2}=-\frac{3{,}33}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{3{,}33}{2}\right)^2+4541{,}55}$$

$$\Leftrightarrow \quad x=-69{,}07 \quad \vee \quad x=65{,}75.$$

Das Dach reicht auf der anderen Seite nur bis x $\approx$ 65,75.
Jedoch ist es dort f (65,75) $\approx$ 34,04 m hoch.

Die genaue Dachlänge ermittelt man mit Hilfe des Satzes von Pythagoras:

Dachlänge^2 = $(69{,}07 + 65{,}75)^2 + (34{,}04 - 30)^2$
Dachlänge^2 $\approx$ 18.192,75
Dachlänge $\approx$ 134,88

Das geneigte Dach ist etwas kürzer, es ist nur 134,88 m lang.

Mögliche, ggf. erprobte Unterrichtsorganisation:

Zur Bearbeitung benötigen die Schüler in der Regel eine Doppelstunde.

Die Aufgabenstellung in Teil a), eine Parabelgleichung aufzustellen, ist kein obligatorischer Inhalt in Jahrgangsstufe 9 / 10; solche „Steckbriefaufgaben“ werden häufig erst in Klasse 11 behandelt. Man kann die Teilaufgabe a) daher auch weglassen und stattdessen mit einem vereinfachten Funktionsterm $y = -0{,}01\,x^2 + 73$ arbeiten. In diesem Fall kann die erste Aufgabenstellung lauten:
„a) Erläutere, wo der Ursprung des Koordinatensystems liegt ?“
Gleichwohl kann man den Schülern auch eine gestufte Hilfe auf „Hilfekärtchen“ anbieten, um Teilaufgabe a) lösen zu können. Denn die Schüler besitzen Wissen über Parabeln und die Form von Parabelgleichungen (Koeffizienten). Die erste Stufe kann lauten: „Überlege dir, wie du das Koordinatensystem möglichst geschickt legen kannst. Welche Form hat dann die Parabelgleichung ?“, die zweite Stufe „Wie musst du das Koordinatensystem legen, damit die Parabelgleichung die Form $f(x) = a\,x^2 + b$ hat ?“ und die dritte Stufe „Wie kannst du die Angaben über den Parabelbogen ausnutzen, um die Gleichung zu finden ?“.

In den nachfolgenden Aufgabenteilen b) – f) besteht die Schwierigkeit für die Schüler häufig darin, die Angaben aus der Aufgabe als x- bzw. y-Werte von Punkten der Parabel zu deuten oder für die Ergebnisse der Rechnungen (x- und y-Werte) die Rückinterpretation auf die Kölnarena zu leisten.

Eine entscheidende Hilfe ist eine genaue und übersichtliche Skizze, die gleich zu Beginn angefertigt werden sollte. Bei den Aufgabenteilen b, c und f kann anhand der Skizze zunächst eine graphische Lösung erstellt werden, die zu einem Ansatz für eine exakte Lösung führen kann.

Mögliche Variationen der Aufgabe und des Aufgabenniveaus:

Besitzen die Schüler Kenntnisse in der Trigonometrie, dann kann man in Aufgabe e) einen Winkel verschieden von 45° wählen.

Erstellt von: Sinus-Transfer, Projekt 1, Set Süd, Untergruppe Köln