Bestimmung der Bahnradien und Energien im H-Atom nach Bohr

Bohr hat für sein Atommodell eine aus historisch Sicht willkürliche Bedingung eingeführt (II), die zur richtigen Formel für die Energien der Elektronen im Wasserstoffatomen führt. Die Herleitung ist aus quantenmechanischer Sicht nicht richtig, denn sie baut auf die Bahn- und Teilchenvorstellung des Elektrons auf. Wir können die quantenmechanische Rechnung aber nicht nachvollziehen und schauen uns daher die Herleitung von Bohr an.

Neben der Bedingung für die Kreisbahn des Elektron um das Proton

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r^2} \quad \text{(I)}$$

hat Bohr folgende Zusatzbedingung für Kreisbahnen in Atomen gesetzt: $2\pi r = n\lambda,\ n = 1,2,3...$ (II).

(II) ergibt mit der De-Broglie Beziehung folgende Gleichungskette (*):

$$2\pi r = n\lambda = n \cdot \frac{h}{mv} \quad \text{(III)}$$

(I) und (III) nach v^2 aufgelöst und gleichgesetzt führt zu (*):

$$\frac{e^2}{m r 4\pi\epsilon_0} = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 m^2 r^2}$$

Diese Gleichung nach r aufgelöst, führt zur Formel der Bahnradien im Bohrschen Atommodell (*):

$$r_n = \frac{h^2\epsilon_0}{\pi m e^2} \cdot n^2 \quad \text{(IV)}$$

Um die Formel für die Energie zu erhalten, bestimmen wir zunächst die Gesamtenergie eines Elektrons. Sie setzt sich aus der kinetischen Energie und der Coulombenergie zusammen:

$$E = E_{kin} + E_{Coulomb} = \frac{m}{2} v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

(I) nach $m v^2$ aufgelöst, in obige Gleichung eingesetzt und vereinfacht führt zu (*):

$$E = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

Hier (IV) einsetzen ergibt (*):

$$\boxed{E_n = -\frac{m e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -13{,}6\, eV \cdot \frac{1}{n^2}}$$

Aufgaben:

1) Führe die Rechenschritte detailliert aus, die im Text an den mit dem (*) markierten Stellen beschrieben sind.
2) Berechne E_n, *für* $n = 1{,}2{,}3{,}4$
3) Stelle die Zustandsenergien und die Besetzung der Zustände in einem geeigneten Diagramm dar.
4) Bestimme die beiden niedrigsten Photonenenergien, die Wasserstoffatome absorbieren können. Berechne die zugehörigen Wellenlängen der Photonen und beurteile, ob es sich um Photonen des sichtbaren Lichtes handelt. Stelle die Vorgänge in dem Diagramm aus 3) dar.
5) Durch Elektonenstoss in einer Wasserstoffdampflampe werden Elektronen im Wasserstoffatom auf die Zustände mit n=3, 4, 5 bzw. 6 angehoben. Anschließend fallen sie zunächst auf dem Zustand n = 2 und anschließend in den Grundzustand zurück.
   Stelle die Anregungsvorgänge durch Elektronenstoss und die Abregungesvorgänge durch Photonenemmision in jeweils einem Diagramm dar. Berechne die Wellenlängen der Photonen, die emittiert werden.
   Vergleiche die Ergebnisse mit dem Anhang S.577 im Physikbuch.